Teoretická část - 7.6.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (včetně konvergence na tomto prostoru) a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (2 body).

   (b) Definujte Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a konvoluci prvků $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ $(1,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení pvrky $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

      i. $\varphi \mapsto -\pi^2\varphi''(-\pi^2)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

      ii. $\varphi \mapsto |\varphi|$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

      iii. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

      iv. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \varphi(2^{-n})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujícíhch tvrzení pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

      i. $\varphi * \delta = \delta$,

      ii. pokud $\varphi * T = 0$, potom $\varphi = 0$, nebo $T = 0$.

      Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).

2. (a) Definujte Laurentovu řadu a reziduum (stačí ve vlastních bodech) (1 bod).
   (b) Zformulujte větu o jednoznačnosti pro holomorfní funkce, princip maxima modulu a Morerovu větu pro obdélníky (4 body).
   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro funkce $f, g \in H(U(i, 0, 2))$:
      i. je-li $f = g$ na množině $\{z \in U(i, 0, 2) : |z| = 1\}$, potom mají f a g stejnou Laurentovu řadu na $U(i, 0, 2)$,
      ii. je-li $f = g$ na množině $\{z \in U(i, 0, 2) : |z| = 2\}$, potom mají f a g stejnou Laurentovu řadu na $U(i, 0, 2)$,
      iii. pro každé $z \in U(i, 0, 1)$ platí $|f(z)| \leq \max_{|z-i|=1} |f(z)|$,
      iv. funkce $e^{\sin |z|}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte komplexní derivaci a Caychy-Riemannovy rovnice (2 body).
   (b) Zformulujte lemma o tvaru komplexní derivace a větu o vztahu Caychy-Riemannových rovnic a komplexní derivace (2 body).
   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kde používáme značení $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ a $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$:
      i. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto \overline{f(z)}$ holomorfní na $\mathbb{C}^+$,
      ii. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto f(\overline{z})$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$,
      iii. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto f(-z)$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$,
      iv. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$.

      Vše řádně zdůvodněte (4 body).